

*И. А. Блинов, канд. техн. наук., доцент кафедры «СИН» ГИЭИ (филиала) ФГБОУ ВПО «ИжГТУ им. М.Т. Калашникова»,  
М. П. Мырыкова, студентка (специальность 151900) ГИЭИ (филиала) ФГБОУ ВПО «ИжГТУ им. М.Т. Калашникова»*

### **Использование слоеных зубьев для повышения нагрузочной способности планетарных передач с малой разницей чисел зубьев колес**

Одной из важнейших задач отечественного машиностроения является создание рациональных конструкций машин и механизмов: надежных, долговечных, имеющих высокий коэффициент полезного действия, минимальную материалоемкость и стоимость на единицу мощности. В связи с этим растет потребность в эффективных механических приводах, входящих в состав большинства современных машин, что привело к широкому распространению планетарных передач, обладающих высокой нагрузочной способностью при хороших массо-габаритных показателях [3].

Исследования планетарных передач в последнее время породили большое количество различных вариантов конструкций, которые являются оптимальными в том или ином плане. Особое место среди планетарных передач занимают передачи типа К-Н-V, согласно классификации проф. Кудрявцева В.Н. [1], схема которых представлена на рисунке 1.

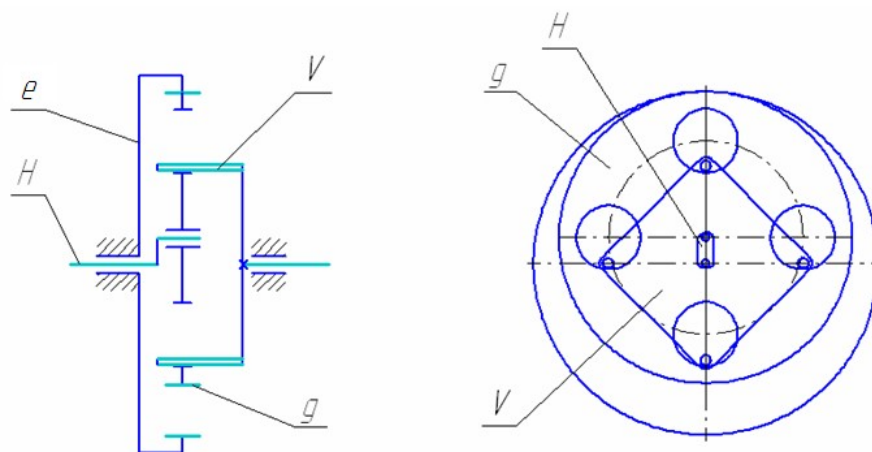


Рис. 1. Схема планетарной передачи типа К-Н-V

Такая передача содержит водило H, на эксцентрично расположенной шейке которого, как на оси, расположен сателлит g, неподвижное колесо с внутренними зубьями e, механизм для передачи момента с сателлита на тихоходный вал V.

При вращении водила сателлит, обкатываясь по неподвижному колесу, совершает сложное движение, складывающееся из двух вращений: вращения сателлита вокруг

собственной оси и вращения оси сателлита вокруг оси передачи. Вращение сателлита вокруг собственной оси снимается с сателлита посредством механизма V и передается на тихоходный вал.

Описанная передача выгодно отличается от остальных тем, что содержит всего два зубчатых колеса, что обуславливает малый объем зуборезных работ, необходимых для ее изготовления. Однако она может содержать два сателлита для приведения центра тяжести передачи к ее оси, что позволяет снизить вибрации при использовании ее на высоких частотах вращения. При этом она позволяет реализовать довольно большое передаточное отношение, которое зависит от чисел зубьев колес и определяется по формуле

$$i = \frac{z_g}{\Delta z}, \quad (1)$$

где  $z_g$  – число зубьев сателлита;  $\Delta z = z_e - z_g$  – разница чисел зубьев сателлита и неподвижного колеса. Из формулы видно, что большое передаточное отношение можно получить, снижая  $\Delta z$ . По этой причине такие передачи часто называют передачами с малой разницей чисел зубьев колес.

Малое значение  $\Delta z$  обуславливает еще одно существенное преимущество передач данного типа перед другими планетарными аналогами – повышенную нагрузочную способность зацепления.

Дело в том, что малая разница в числах зубьев, является причиной крайне малых зазоров между зубьями в парах, расположенных вблизи непосредственно контактирующих и передающих нагрузку зубьев. И в случае, если изгибная деформация зубьев под нагрузкой сопоставима или превышает зазоры в рядом расположенных парах, они вступают в работу, начинают передавать часть общей нагрузки и деформироваться совместно с первыми. В результате такого распределения нагрузки по большому количеству пар зубьев на каждый передающий нагрузку зуб приходится меньшая часть от общей нагрузки, что положительно сказывается на несущей способности передачи в целом.

Чтобы учесть описанный эффект при расчетах передач с малой разницей чисел зубьев на прочность, в формулы для определения изгибных и контактных напряжений был введен, так называемый коэффициент многопарности  $\lambda$ , который показывает, какая часть от общей передаваемой зацеплением нагрузки приходится на наиболее нагруженную пару [2]:

$$\lambda = \frac{F_{\max}}{F_{\text{общ}}}, \quad (2)$$

где,  $F_{\max}$  – сила в зацеплении пары наиболее нагруженных зубьев;  $F_{\text{общ}}$  – общая нагрузка, передаваемая всеми парами зубьев в зацеплении.

Согласно [2] для повышения нагрузочной способности передачи необходимо стремиться к уменьшению коэффициента многопарности. Сделать это можно как за счет выполнения оптимальной геометрии зацепления, что уже было выполнено в работах ряда исследователей, так и за счет повышения податливости (уменьшения жесткости) зубьев передачи. На рисунке 2 показаны графики зависимости коэффициента многопарности от жесткости зацепления при различной передаваемой нагрузке. Графики выполнены для передачи со следующими параметрами:

Таблица 1. Параметры передачи

Модуль зубьев $m$ , мм	Число зубьев неподвижного колеса, $z_e$	Разница чисел зубьев колес, $\Delta z$	Коэффициент смещения исходного контура зуба сателлита, $x_g$	Угол зацепления, $\alpha_w$ , °
3	90	3	0	45

Для построения зависимостей была использована компьютерная модель, выполненная в программе MathCAD и построенная на базе математической модели, описанной в [2].

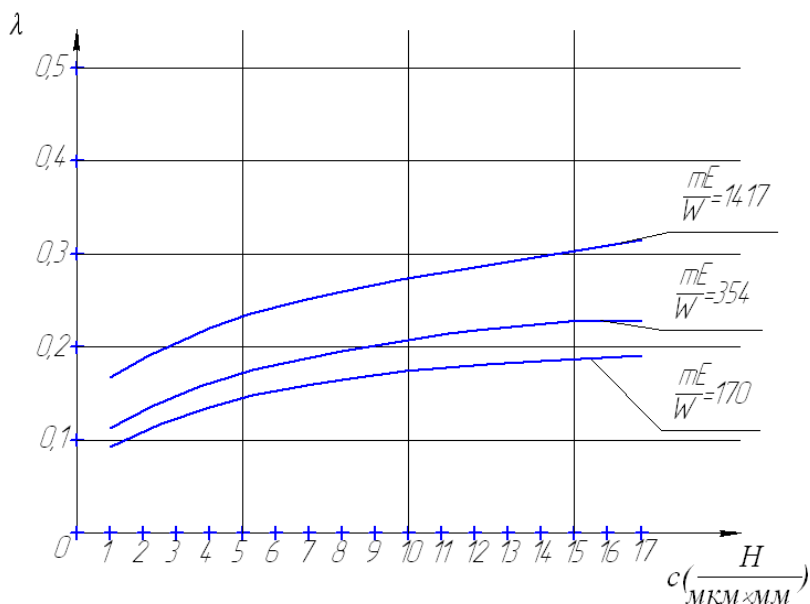


Рис. 2. График зависимости коэффициента многопарности от жесткости при

различной нагрузке,  $W$  – погонная нагрузка ( $W = \frac{T_g}{r_{bg} b_w}$ , где  $T_g$  – момент на сателлите,  $r_{bg}$  – радиус основной окружности сателлита)

Понизить изгибную жесткость зубьев можно различными способами: за счет отверстий в зубьях (рис. 3 (а)), за счет пазов во впадинах между зубьями (рис. 3 (б)), путем

выполнения зуба переменной ширины (как балки равного сопротивления) и за счет выполнения зуба, состоящим из нескольких слоев (рис. 3 (в)).

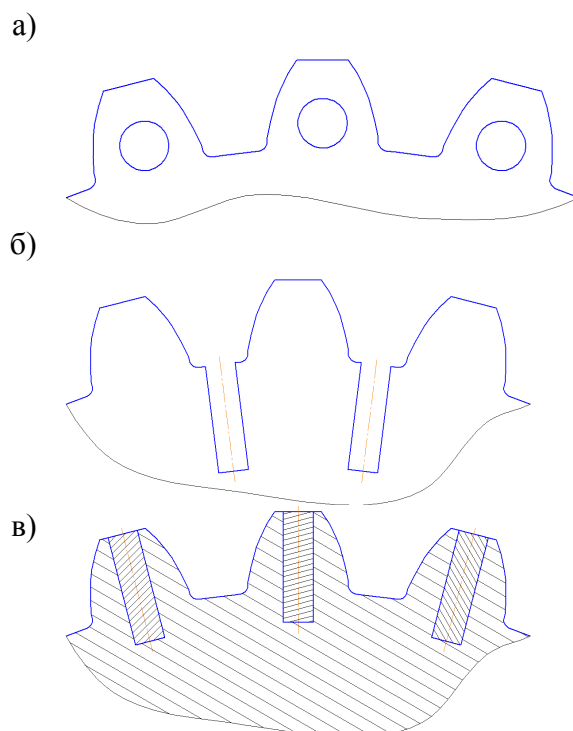


Рисунок 3. Пути понижения изгибной жесткости зубьев:

а – отверстия в зубьях; б – пазы во впадинах; в – составной зуб.

Первый способ помимо некоторого снижения жесткости существенно разупрочняет зуб, снижая моменты сопротивления изгибу поперечных сечений; второй способ хорошо понижает жесткость за счет увеличения длины, работающей на изгиб, однако при этом существенно увеличивается изгибающий момент в опорном сечении зуба, а следовательно, увеличиваются и изгибные напряжения, наиболее эффективным является третий способ.

Рассмотрим выполнение зуба трехслойным, за счет вставки пластины в паз. Если слои между собой не связаны и силы трения между ними малы, то каждый из них деформируется как отдельная балка, имеющая свой нейтральный слой. Нагрузка между этими балками распределяется пропорционально их жесткостям при изгибе. Это означает, что моменты инерции и моменты сопротивления трех независимо друг от друга деформирующихся балок должны быть просуммированы. Этот путь наиболее оптимален в плане обеспечения наибольшей податливости при некотором снижении сопротивления сечений зуба изгибу.

Целью настоящего исследования является определение влияния геометрии слоеного зуба на коэффициент многопарности передачи, нахождение области

рационального применения слоеного зуба и вывод рекомендаций для проектирования указанных передач с использованием слоеного зуба.

Исследование проводилось следующим образом.

В качестве базового использовали стандартное внутреннее зацепление, геометрия которого определяется по формулам из ГОСТ 19274-73. Геометрическая особенность передач с малой разницей чисел зубьев колес в том, что они подвержены наложению эвольвентных профилей зубьев, так называемой интерференции второго рода. Поэтому после определения основных геометрических параметров передачи – делительных диаметров, диаметров окружностей вершин, впадин, начальных и основных окружностей и т.д. – проводилась проверка на предмет отсутствия указанной интерференции. Условие отсутствия интерференции второго рода имеет вид (3)

$$z_g(\text{inv}\alpha_{ag} + \delta_g) - z_e(\text{inv}\alpha_{ae} + \delta_e) + \Delta z \cdot \text{inv}\alpha_w > 0, \quad (3)$$

$$\text{где } \alpha_{ag} = \arccos\left(\frac{r_{bg}}{r_{ag}}\right), \alpha_{ae} = \arccos\left(\frac{r_{be}}{r_{ae}}\right), \delta_g = \arccos\frac{r_{ac}^2 - a_w^2 - r_{ag}^2}{2a_w r_{ag}}, \delta_e = \arccos\frac{r_{ac}^2 + a_w^2 - r_{ag}^2}{2a_w r_{ae}}$$

,  $z_g, z_e$  – числа зубьев сателлита и колеса, соответственно,  $\alpha_w$  – угол зацепления,  $a_w$  – межосевое расстояние передачи (эксцентриситет водила),  $r_{bg}, r_{be}$  – радиусы основных окружностей сателлита и колеса,  $r_{ag}, r_{ae}$  – радиусы окружностей выступов сателлита и колеса.

В случае невыполнения условия (3) геометрия передачи корректировалась путем увеличения диаметра окружностей выступов колеса. Зубья колеса частично срезались, выполнялись укороченными.

После корректировки геометрии зацепления определялись зазоры между зубьями колес слева и справа от пары сопрягаемых зубьев при отсутствии нагрузки и нахождении точки контакта указанной пары посередине активного участка линии зацепления (рис. 4).

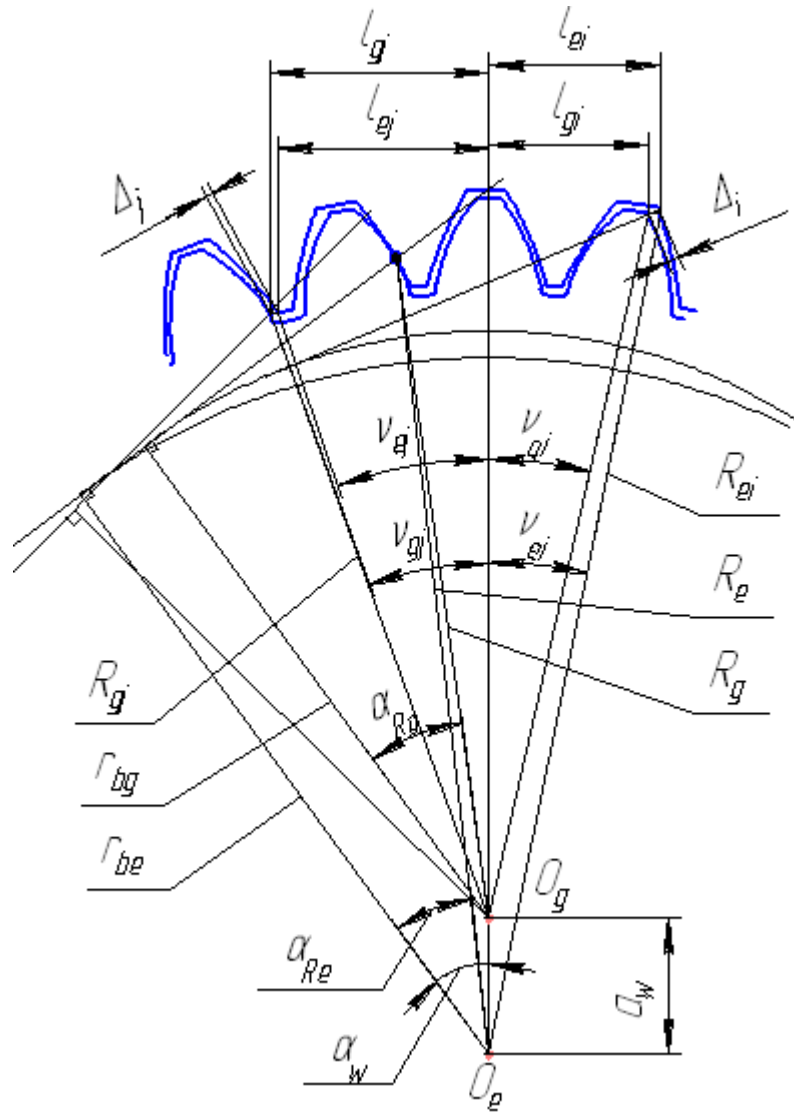


Рис. 4. К определению зазоров  $\Delta$

Зазоры между зубьями справа от контактирующей пары

$$\Delta = (l_{ei} - l_{gi}) \cos(\alpha_{ag} - \nu_{gi}), \quad (4)$$

где  $l_{ei} = R_{ei} \sin \nu_{ei}$ ,  $l_{gi} = r_{ag} \sin \nu_{gi}$ ,

$$\nu_{gi} = \tau_g i - \text{inv } \alpha_{ag} + \text{tg } \alpha_{Rg} - \alpha_w,$$

$$\nu_{ei} = \tau_e i - \text{inv } \alpha_{Rei} + \text{tg } \alpha_{Re} - \alpha_w,$$

$$R_{ei} = \sqrt{l_{gi}^2 + (a_w + r_{ag} \cos \nu_{gi})^2},$$

$$\alpha_{ag} = \arccos(r_{bg}/r_{ag}), \quad \alpha_{Rei} = \arccos(r_{be}/R_{ei}),$$

$$\alpha_{Re} = \arccos(r_{be}/R_e), \quad \alpha_{Rg} = \arccos(r_{bg}/R_g),$$

$$\tau_g = 2\pi/z_g, \quad \tau_e = 2\pi/z_e,$$

$$R_e = \sqrt{r_{be}^2 + (R_g \sin \alpha_{Rg} + a_w \sin \alpha_w)^2},$$

$$R_g = \sqrt{r_{bg}^2 + (\sqrt{r_{ag}^2 - r_{bg}^2} - 0,5L)^2},$$

$$L = \sqrt{r_{ag}^2 - r_{bg}^2} - \left( \sqrt{r_{ae}^2 - r_{be}^2} - a_w \sin \alpha_w \right),$$

$\alpha_w$  - угол зацепления;  $r_{bg}$ ,  $r_{be}$  - радиусы основных окружностей сателлита и колеса;  
 $a_w$  - межосевое расстояние,  $r_{ag}$  - радиус окружности выступов сателлита,  $z_g$ ,  $z_e$  - числа  
зубьев колес.

Зазоры между зубьями слева от контактирующей пары (см. рис. 4)

$$\Delta_j = (l_{gj} - l_{ej}) \cos(\alpha_{ae} + \nu_{ej}), \quad (5)$$

где  $l_{ej} = r_{ae} \sin \nu_{ej}$ ,  $l_{gj} = R_{gj} \sin \nu_{gj}$ ,

$$\nu_{ej} = \alpha_w + \tau_e j - \text{tg} \alpha_{Re} + \text{inv} \alpha_{ae},$$

$$\nu_{gj} = \alpha_w + \tau_g j - \text{tg} \alpha_{Rg} + \text{inv} \alpha_{Rgj},$$

$$R_{gj} = \sqrt{l_{ej}^2 + (r_{ae} \cos \nu_{ej} - a_w)^2},$$

$$\alpha_{ae} = \arccos(r_{be}/r_{ae}), \quad \alpha_{Rgj} = \arccos(r_{bg}/R_{gj}).$$

Диаграмма распределения зазоров в парах зубьев, изображенная на рисунке 5, построенная с использованием описанного выше геометрического метода, для передачи с параметрами, взятыми из таблицы 1, показывает небольшую величину зазоров, измеряемую десятками и сотнями микрометров и сопоставимую с величиной изгибных деформаций отдельных зубьев.

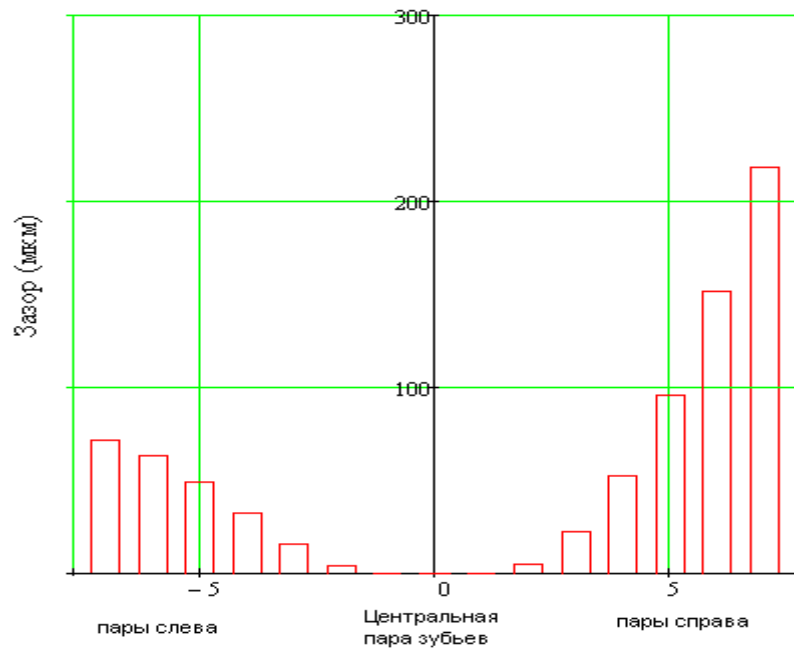


Рис. 5. Величины зазоров в парах зубьев без нагрузки, близких к контактирующей центральной паре

После определения зазоров, согласно [2] составляются уравнения совместности деформаций зубьев, имеющих общий вид (6), по которым определяются количество пар зубьев несущих нагрузку и распределение сил в отдельных парах:

$$\left. \begin{aligned}
P_0 &= \delta b_w c, \\
P_{i=1} &= (\delta - \Delta_{i=1}) b_w c, \\
P_{j=1} &= (\delta - \Delta_{j=1}) b_w c, \\
\cdots \cdots \cdots \\
P_{i=n} &= (\delta - \Delta_{i=n}) b_w c, \\
P_{j=m} &= (\delta - \Delta_{j=m}) b_w c, \\
P_0 + \sum_{i=1}^n P_i + \sum_{j=1}^m P_j &= T_c / r_{be} .
\end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Однако, описанная математическая модель не применима для исследования зацепления из составных зубьев, т.к. не содержит непосредственной связи геометрии зубьев с жесткостью зубьев с. Жесткость задается как константа и ее значение выбирается из справочников. Для нашего исследования необходимо установить связь жесткости зубьев с геометрией зуба. Рассмотрим зубья сателлита и эпицикла как консольно-закрепленные балки и определим их перемещения под действием сил в зацеплении методом Мора по формуле

$$\delta = \sum_0^l \int \frac{M_x(z) \cdot \overline{M}_x(z)}{E \cdot I_x(z)} dz , \quad (7)$$

где  $M_x(z)$ ,  $\overline{M}_x(z)$  - функциональные зависимости изгибающих моментов от продольной координаты сечения в нагруженном состоянии и в единичном,  $E$  – модуль упругости первого рода,  $I_x(z)$  – зависимость момента инерции сечений зуба от продольной координаты.

Схема нагружения зуба сателлита и колеса центральной пары представлена на рис. 6.



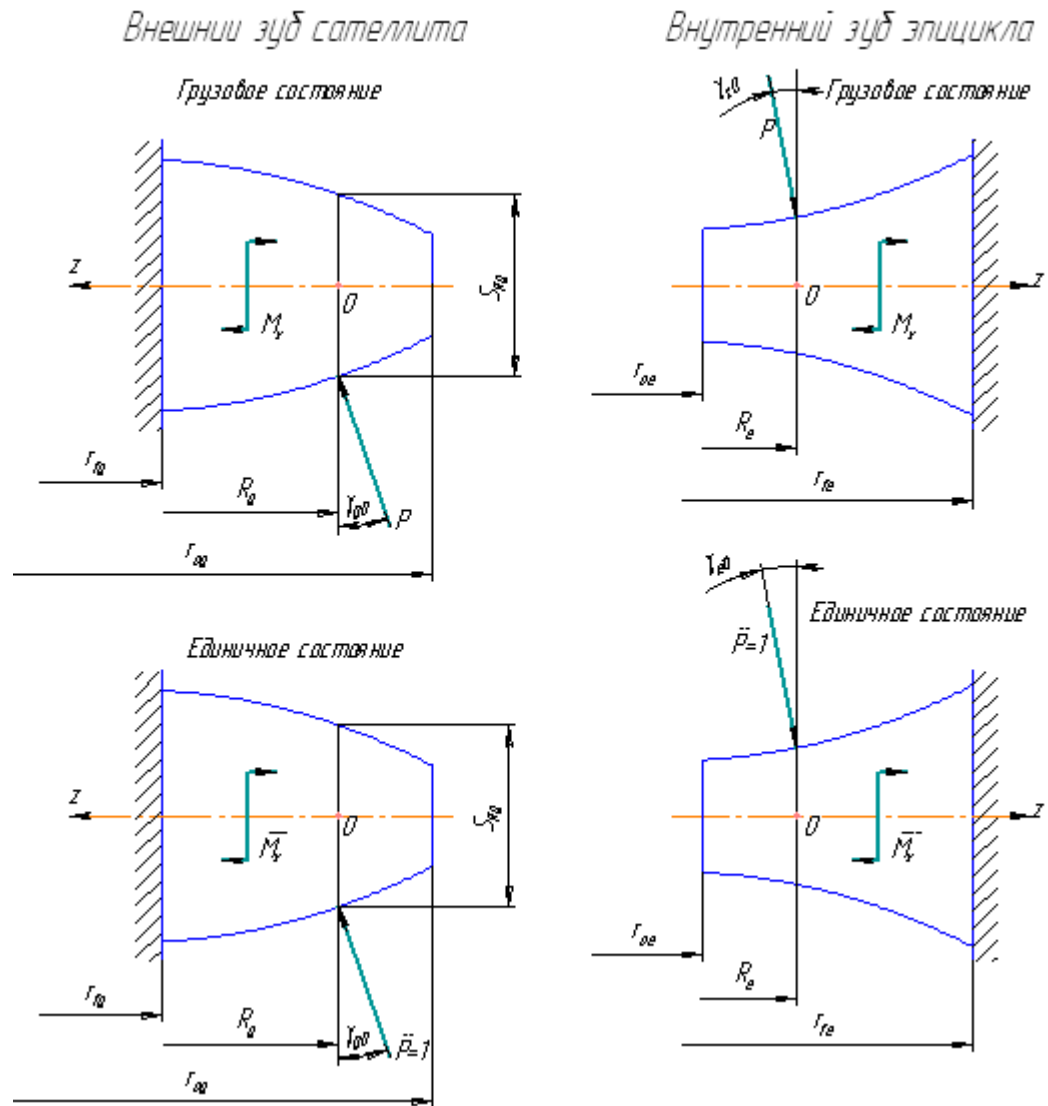


Рис. 6. Схемы нагружения зубьев центральной пары

Функциональная зависимость изгибающего момента от продольной координаты сечения для зубьев сателлита и колеса имеет вид (8) и (9), соответственно:

$$M_x(z) = Pz \cos \gamma_{g0} - 0.5PS_{Rg0} \sin \gamma_{g0}, \quad (8)$$

$$M_x(z) = Pz \cos \gamma_{e0} - 0.5PS_{Re0} \sin \gamma_{e0}, \quad (9)$$

где  $P$  – сила, передаваемая парой зубьев,  $z$  – координата поперечного сечения зуба,  $S_{Rg0}$  и  $S_{Re0}$  – толщины зубьев по окружностям, содержащим точку контакта для внешнего зуба (10), для внутреннего (11) (согласно ГОСТ 19274-73),  $\gamma_{g0}$ ,  $\gamma_{e0}$  – углы наклона линии действия силы в зацеплении к поперечному сечению зубьев сателлита и эпицикла, определяются геометрически (см. рис. 7). Для центральной пары

$$\gamma_{g0} = \operatorname{tg} \alpha_{Rg} - \operatorname{tg} \alpha_{ag} + \alpha_{ag} + \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{2r_{ag}^2 - S_{ag}^2}{2r_{ag}^2} \right); \quad \gamma_{e0} = \operatorname{tg} \alpha_{Re} - \operatorname{tg} \alpha_{ae} + \alpha_{ae} + \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{2r_{ae}^2 - S_{ae}^2}{2r_{ae}^2} \right)$$

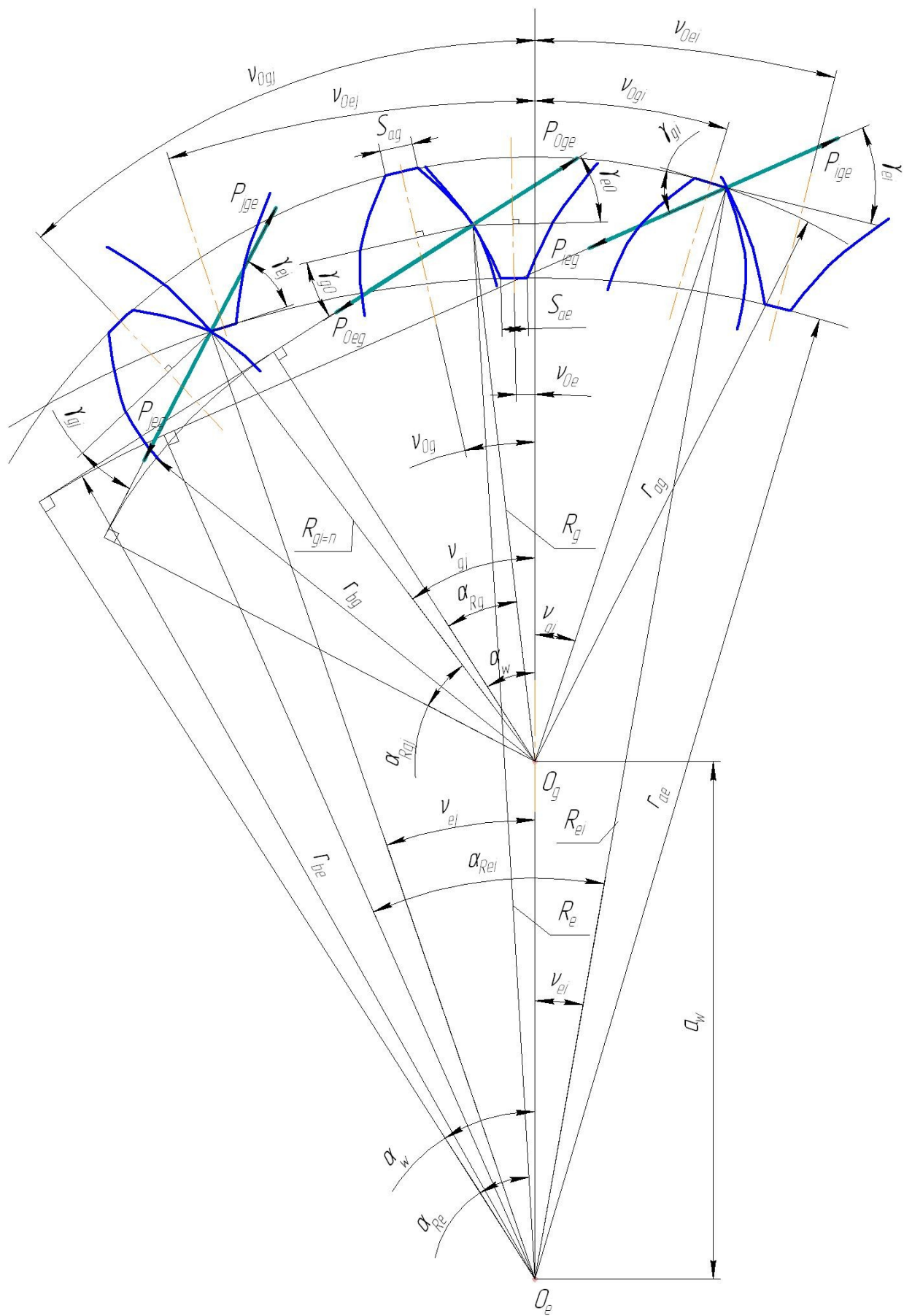


Рис. 7. К определению углов  $\gamma$

$$S_{xg} = d_{xg} \left( \frac{\frac{\pi}{2} + 2x_g \tan \alpha}{z_g} + \text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_{xg} \right), \quad (10)$$

$$S_{xe} = d_{xe} \left( \frac{\frac{\pi}{2} - 2x_e \tan \alpha}{z_e} - \text{inv } \alpha + \text{inv } \alpha_{xe} \right), \quad (11)$$

где  $d_{xg}$ ,  $d_{xe}$  - диаметры окружностей, на которых определяется толщина зуба,

$\alpha_{xg} = \arccos \frac{d_{bg}}{d_{xg}}$ ,  $\alpha_{xe} = \arccos \frac{d_{be}}{d_{xe}}$  - углы профилей зубьев в точке на окружности диаметра

$d_x$ .

Моменты от действия единичных сил в направлении перемещения

$$\bar{M}_x(z) = z \cos \gamma_{g0} - 0.5 S_{Rg0} \sin \gamma_{g0}, \quad (12)$$

$$\bar{M}_x(z) = z \cos \gamma_{e0} - 0.5 S_{Re0} \sin \gamma_{e0}. \quad (13)$$

Так как толщина зуба  $S$  переменна по длине зуба, то следовательно переменным будет и момент инерции. Момент инерции прямоугольного сечения зуба

$$I_x(z) = \frac{b_w \cdot S_x(z)^3}{12}, \quad (14)$$

где  $S_x(z)$  - зависимости высоты прямоугольного сечения зуба от продольной координаты, которые можно вывести из формул (10) и (11), положив  $d_{xg} = 2(R_g - z)$  и  $d_{xe} = 2(R_e + z)$ .

Объединяя формулы (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14) и (7), получим для сателлита и колеса, соответственно

$$\delta = \int_0^{(R_g - r_{fg})} \frac{12P(z \cos \gamma_{g0} - 0.5 S_{Rg0} \sin \gamma_{g0})^2}{Eb_w \left( 2(R_g - z) \left( \frac{0.5\pi + 2x_g \tan \alpha}{z_g} + \text{inv } \alpha - \text{inv} \left( \arccos \frac{d_{bg}}{2(R_g - z)} \right) \right) \right)^3} dz, \quad (15)$$

$$\delta = \int_0^{(r_{fe} - R_e)} \frac{12P(z \cos \gamma_{e0} - 0.5 S_{Re0} \sin \gamma_{e0})^2}{Eb_w \left( 2(R_e + z) \left( \frac{0.5\pi - 2x_e \tan \alpha}{z_g} - \text{inv } \alpha + \text{inv} \left( \arccos \frac{d_{be}}{2(R_e + z)} \right) \right) \right)^3} dz. \quad (16)$$

Зубья сателлита и колеса при передаче нагрузки деформируются совместно, поэтому общая изгибная деформация центральной пары определяется суммой интегралов (15) и (16). Полученная формула сложна для непосредственного интегрирования, поэтому найдем приближенное решение, заменяя интеграл суммой площадей прямоугольников

шириной  $\Delta z_g = \frac{R_g - r_{fg}}{n}$  для сателлита и  $\Delta z_e = \frac{r_{fe} - R_e}{n}$  для колеса, где  $n$  - количество

элементарных прямоугольников (в расчетах принималось  $n = 1000$ ), и высотой, определяемой подынтегральной функцией, при подстановке в нее продольных координат  $z$  центров прямоугольников

$$\delta = \sum_{k=1}^n \frac{12P(z_k \cos \gamma_{g0} - 0.5S_{Rg0} \sin \gamma_{g0})^2}{Eb_w \left( 2(R_g - z_k) \left( \frac{0,5\pi + 2x_g \tan \alpha}{z_g} + \operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \left( \arccos \frac{d_{bg}}{2(R_g - z_k)} \right) \right) \right)^3} \Delta z_g +$$

$$+ \sum_{m=1}^n \frac{12P(z_m \cos \gamma_{e0} - 0.5S_{Re0} \sin \gamma_{e0})^2}{Eb_w \left( 2(R_e + z_m) \left( \frac{0,5\pi - 2x_g \tan \alpha}{z_g} - \operatorname{inv} \alpha + \operatorname{inv} \left( \arccos \frac{d_{bg}}{2(R_e + z_m)} \right) \right) \right)^3} \Delta z_e. \quad (17)$$

Вынесем силу в зацеплении  $P$  и ширину зубчатого венца  $b_w$  за скобки и приведем

формулу к виду  $\delta = \frac{P}{b_w c}$ , удобному для использования в составе системы уравнений (6).

Тогда жесткость центральной пары зубьев  $c$  можно определить из равенства

$$\frac{1}{c} = \frac{3}{2E} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{(z_k \cos \gamma_{g0} - 0.5S_{Rg0} \sin \gamma_{g0})^2}{(R_g - z_k)^3 \left( \frac{0,5\pi + 2x_g \tan \alpha}{z_g} + \operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \left( \arccos \frac{d_{bg}}{2(R_g - z_k)} \right) \right)^3} \Delta z_g + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^n \frac{(z_m \cos \gamma_{e0} - 0.5S_{Re0} \sin \gamma_{e0})^2}{(R_e + z_m)^3 \left( \frac{0,5\pi - 2x_g \tan \alpha}{z_g} - \operatorname{inv} \alpha + \operatorname{inv} \left( \arccos \frac{d_{bg}}{2(R_e + z_m)} \right) \right)^3} \Delta z_e \right] \quad (18)$$

Формула (18) применима для пары цельных зубьев. При выводе формулы жесткости для пары слоеных зубьев необходимо учитывать, что момент инерции слоеного зуба определяется суммой моментов инерции сечений отдельных слоев (см. рис. 8).

$$I_{xc}(z) = \frac{b_w}{12} \left( h^3 + \frac{(S_x(z) - h)^3}{4} \right). \quad (19)$$

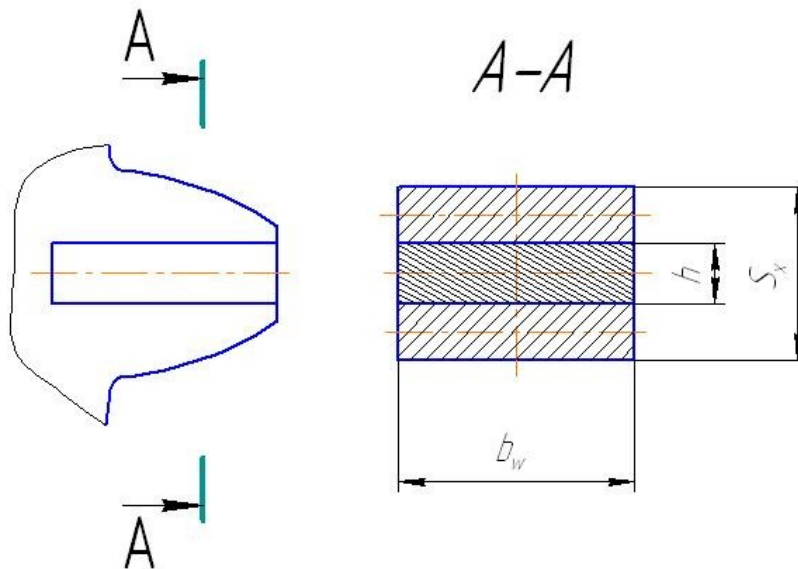


Рис. 8. Зуб с пластинчатой вставкой

Объединим формулы (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13), (19). Заменяя интегрирование суммированием, вычленим из полученной формулы выражение, определяющее жесткость зубьев сателлита и колеса центральной пары:

$$\frac{1}{c} = \frac{48}{E} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{(z_k \cos \gamma_{g0} - 0.5S_{Rg0} \sin \gamma_{g0})^2}{4h^3 + \left( 2(R_g - z_k) \left( \frac{0.5\pi + 2x_g \tan \alpha}{z_g} + \text{inv } \alpha - \text{inv} \left( \arccos \frac{d_{tg}}{2(R_g - z_k)} \right) \right) - h \right)^3 \Delta z} \right. \quad (19)$$

$$\left. + \sum_{m=1}^n \frac{(z_m \cos \gamma_{e0} - 0.5S_{Re0} \sin \gamma_{e0})^2}{4h^3 + \left( 2(R_c + z_m) \left( \frac{0.5\pi - 2x_g \tan \alpha}{z_g} - \text{inv } \alpha + \text{inv} \left( \arccos \frac{d_{tg}}{2(R_c + z_m)} \right) \right) - h \right)^3 \Delta z_c} \right]$$

где  $h$  – толщина пластинчатой вставки.

Аналогичным методом выводим формулы для определения жесткости пар зубьев слева и справа относительно центральной. При выводе необходимо учитывать их кромочный контакт, а не контакт эвольвентными участками, как в центральной паре. Схемы нагружения зубьев показаны на рисунках 9 и 10.

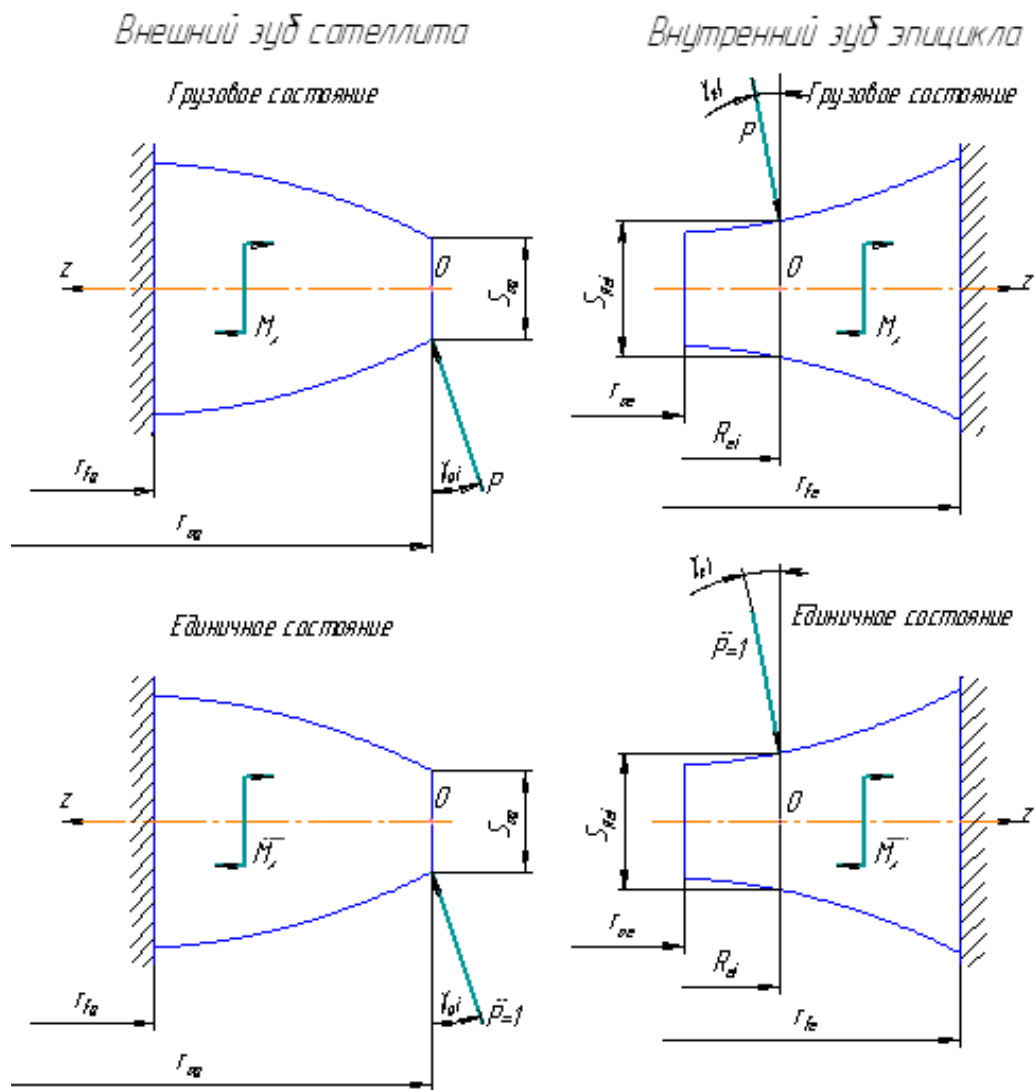


Рис. 9. Схемы нагружения пар зубьев справа относительно центральной

Жесткость пар цельных зубьев справа относительно центральной пары определяется из выражения (20), слоеных – из выражения (21):

$$\frac{1}{c} = \frac{3}{2E} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{(z_k \cos \gamma_{gi} - 0.5S_{ag} \sin \gamma_{gi})^2}{(r_{ag} - z_k)^3 \left( \frac{0.5\pi + 2x_g \tan \alpha}{z_g} + \text{inv } \alpha - \text{inv} \left( \arccos \frac{r_{bg}}{r_{ag} - z_k} \right) \right)^3 \Delta z_{gi}} + \sum_{m=1}^n \frac{(z_m \cos \gamma_{ei} - 0.5S_{Rei} \sin \gamma_{ei})^2}{(R_{ei} + z_m)^3 \left( \frac{0.5\pi - 2x_g \tan \alpha}{z_g} - \text{inv } \alpha + \text{inv} \left( \arccos \frac{r_{bg}}{R_{ei} + z_m} \right) \right)^3 \Delta z_{ei}} \right] \quad (20)$$

$$\frac{1}{c} = \frac{48}{E} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{(z_k \cos \gamma_{gi} - 0.5S_{ag} \sin \gamma_{gi})^2}{4h^3 + \left( 2(r_{ag} - z_k) \left( \frac{0.5\pi + 2x_g \tan \alpha}{z_g} + \text{inv } \alpha - \text{inv} \left( \arccos \frac{r_{bg}}{r_{ag} - z_k} \right) \right) - h \right)^3} \Delta z_{gi} + \sum_{m=1}^n \frac{(z_m \cos \gamma_{ei} - 0.5S_{Rei} \sin \gamma_{ei})^2}{4h^3 + \left( 2(R_{ei} + z_m) \left( \frac{0.5\pi - 2x_g \tan \alpha}{z_g} - \text{inv } \alpha + \text{inv} \left( \arccos \frac{r_{bg}}{R_{ei} + z_m} \right) \right) - h \right)^3} \Delta z_{ei} \right] \quad (21)$$

где  $\gamma_{gi} = \alpha_{Rei} - \nu_{ei} - \gamma_{g0} + \tau_g \cdot i$ ,  $\gamma_{ei} = \alpha_{Rei} - \nu_{ei} - \gamma_{e0} + \tau_e \cdot i$ ,  $\Delta z_{gi} = \frac{r_{ag} - r_{fg}}{n}$ ,  $\Delta z_{ei} = \frac{r_{fe} - R_{ei}}{n}$ ,  $i$  - порядковый номер пары справа от центральной.

Жесткость пар цельных зубьев слева относительно центральной пары определяется из выражения (22), слоеных – из выражения (23):

$$\frac{1}{c} = \frac{3}{2E} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{(z_k \cos \gamma_{gj} - 0.5S_{Rgj} \sin \gamma_{gj})^2}{(R_{gj} - z_k)^3 \left( \frac{0.5\pi + 2x_g \tan \alpha}{z_g} + \text{inv } \alpha - \text{inv} \left( \arccos \frac{r_{bg}}{R_{gj} - z_k} \right) \right)^3} \Delta z_{gj} + \sum_{m=1}^n \frac{(z_m \cos \gamma_{ei} - 0.5S_{Rei} \sin \gamma_{ei})^2}{(r_{ae} + z_m)^3 \left( \frac{0.5\pi - 2x_g \tan \alpha}{z_g} - \text{inv } \alpha + \text{inv} \left( \arccos \frac{r_{bg}}{r_{ae} + z_m} \right) \right)^3} \Delta z_{ej} \right] \quad (22)$$

$$\frac{1}{c} = \frac{48}{E} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{(z_k \cos \gamma_{gj} - 0.5S_{ngj} \sin \gamma_{gj})^2}{4h^3 + \left( 2(R_{gj} - z_k) \left( \frac{0.5\pi + 2x_g \tan \alpha}{z_g} + \text{inv } \alpha - \text{inv} \left( \arccos \frac{r_{bg}}{R_{gj} - z_k} \right) \right) - h \right)^3} \Delta z_{gj} + \sum_{m=1}^n \frac{(z_m \cos \gamma_{ei} - 0.5S_{Rei} \sin \gamma_{ei})^2}{4h^3 + \left( 2(r_{ae} + z_m) \left( \frac{0.5\pi - 2x_g \tan \alpha}{z_g} - \text{inv } \alpha + \text{inv} \left( \arccos \frac{r_{bg}}{r_{ae} + z_m} \right) \right) - h \right)^3} \Delta z_{ej} \right] \quad (23)$$

где  $\gamma_{gj} = \alpha_{Rgj} + \nu_{gj} - \gamma_{g0} - \tau_g \cdot i$ ,  $\gamma_{ej} = \alpha_{Rgj} + \nu_{gj} - \gamma_{e0} + \tau_e \cdot i$ ,  $\Delta z_{gj} = \frac{R_{gj} - r_{fg}}{n}$ ,  $\Delta z_{ej} = \frac{r_{fe} - r_{ae}}{n}$ ,  $j$  -

порядковый номер пары слева от центральной.

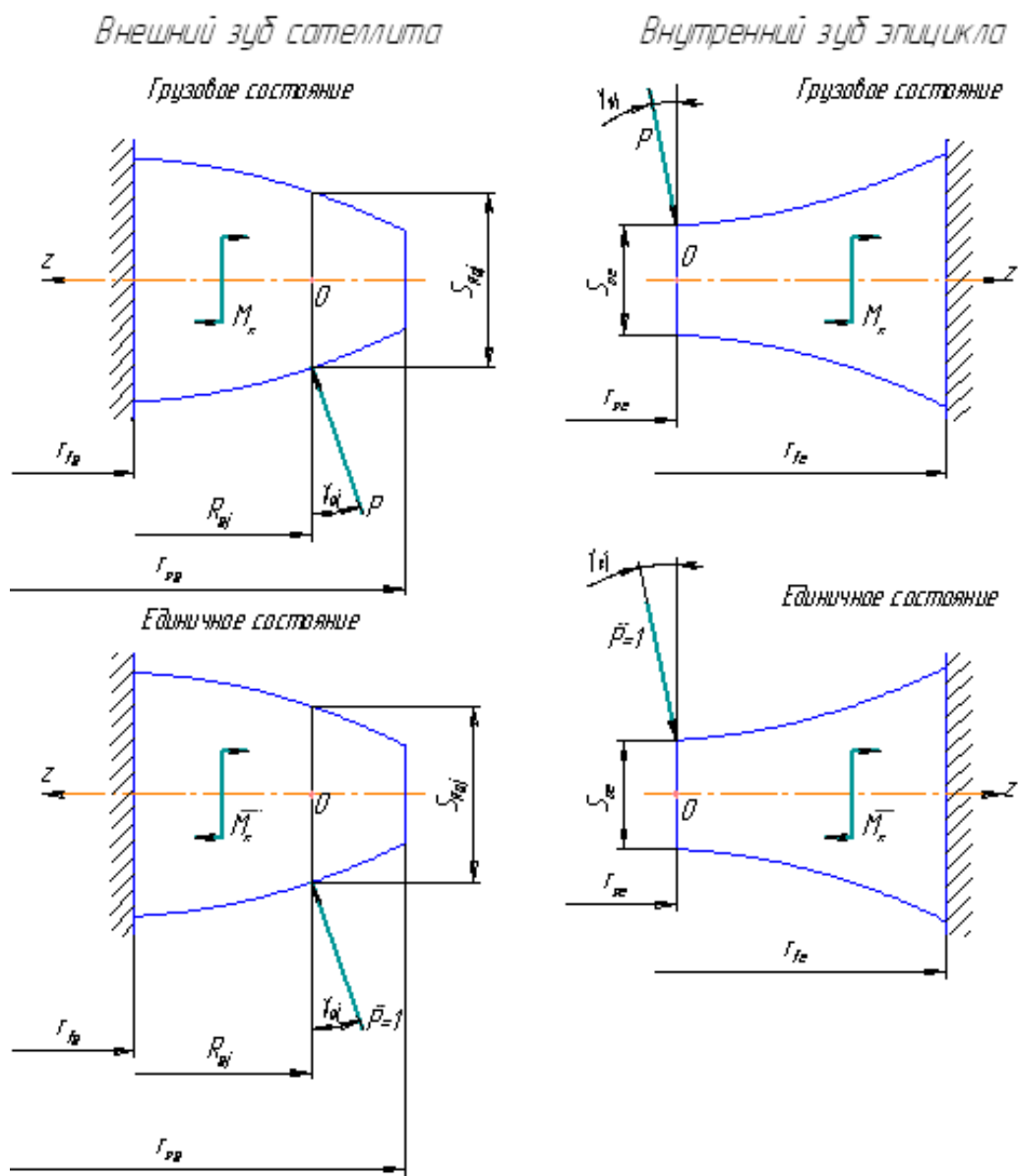


Рис. 10. Схемы нагружения пар зубьев слева относительно центральной

После определения жесткостей для каждой пары зубьев составляется ряд систем уравнений совместности деформаций, которые имеют общий вид (6), из условия что нагрузку несет разное количество пар зубьев ( $i = j = 0, i = j = 1, i = j = 2, i = j = 3$  и т.д.). Из всех полученных решений правильным будет являться то, которое дает положительные значения сил в зацеплениях при максимальном значении  $i$  и  $j$ .

После определения сил в парах зубьев можно определить коэффициент многопарности по формуле (2).

Расчет коэффициента многопарности, ввиду сложности используемых формул, был автоматизирован в системе компьютерной алгебры MathCAD. При помощи созданной программы были построены графики зависимости коэффициента многопарности от нагрузки и геометрических параметров передач с цельным и слоеным зубом.



Графики зависимости коэффициента многопарности от угла зацепления для передач с  $m = 3$  мм,  $z_e = 90$ ,  $x_g = 0$ ,  $mE/W = 436$  с цельными и составными зубьями ( $h/m = 0,6$ ) представлены на рисунке 11.

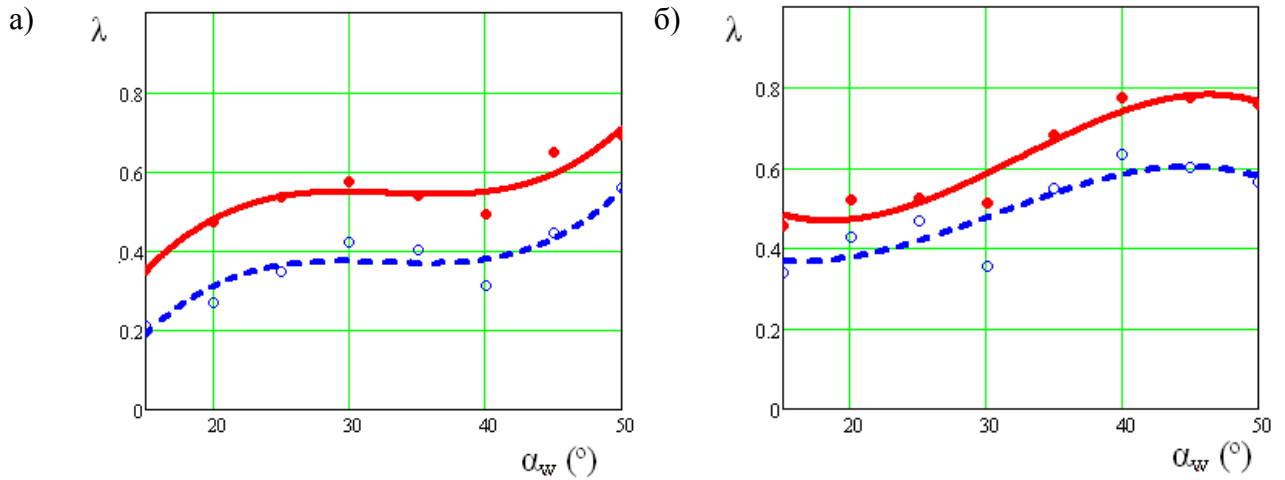


Рис. 11. Графики зависимости  $\lambda(\alpha_w)$ : а – при  $\Delta z = 2$  ( $mE/W = 291$ ); б – при  $\Delta z = 3$  ( $mE/W = 436$ ); ●●● - значения  $\lambda(\alpha_w)$  для передачи с цельными зубьями; — - кривая, аппроксимирующая значения  $\lambda(\alpha_w)$  для передачи с цельными зубьями; ○○○ - рассчитанные значения  $\lambda(\alpha_w)$  для передачи с составными зубьями; - - - кривая, аппроксимирующая значения  $\lambda(\alpha_w)$  для передачи с составными зубьями

Графики зависимости коэффициента многопарности от числа зубьев колеса для передач с  $m = 3$  мм,  $\Delta z = 3$ ,  $mE/W = 436$ ,  $x_g = 0$ , с цельными и составными зубьями ( $h/m = 0,6$ ) изображены на рисунке 12.

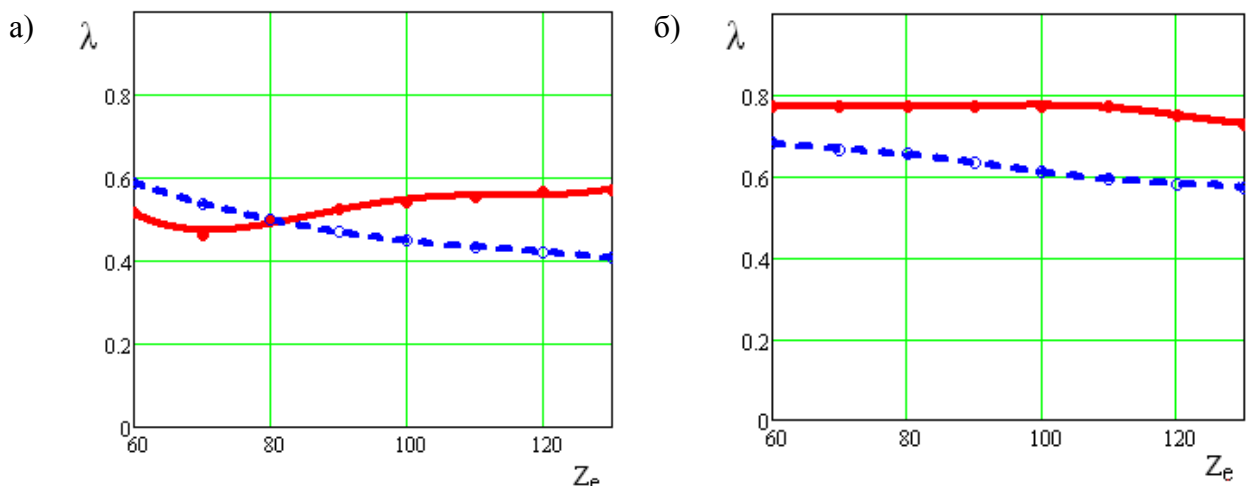


Рис. 12. Графики зависимости  $\lambda(z_e)$ : а – при  $\alpha_w = 25^\circ$ ; б – при  $\alpha_w = 40^\circ$ ; ●●● - значения  $\lambda(z_e)$  для передачи с цельными зубьями; — - кривая, аппроксимирующая значения  $\lambda(z_e)$  для передачи с цельными зубьями; ○○○ - рассчитанные значения  $\lambda(z_e)$  для передачи с составными зубьями;

— — - кривая, аппроксимирующая значения  $\lambda(z_c)$  для передачи с составными зубьями

На рисунке 13 - графики зависимости коэффициента многопарности от разницы в числах зубьев колеса для передач с  $m = 3$  мм,  $z_c = 90$ ,  $x_g = 0$ ,  $\alpha_w = 30^\circ$  с цельными и составными зубьями ( $h/m = 0,6$ ).

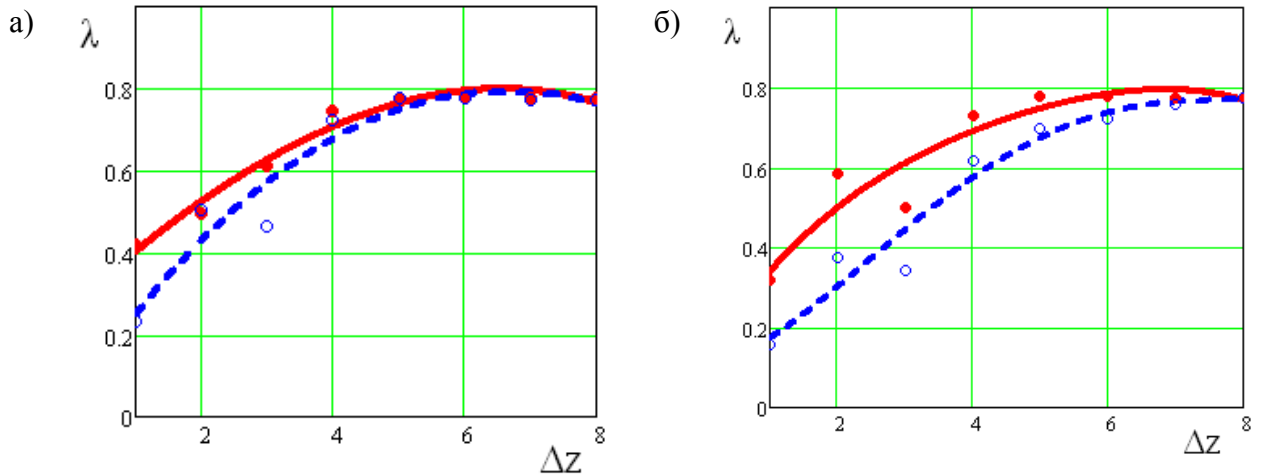


Рис. 13. Графики зависимости  $\lambda(\Delta z)$ : а – при  $mE/W = 775$  ; б – при  $mE/W = 232$  ;

●●● - значения  $\lambda(\Delta z)$  для передачи с цельными зубьями; — - кривая, аппроксимирующая значения  $\lambda(\Delta z)$  для передачи с цельными зубьями;  
 ○○○ - рассчитанные значения  $\lambda(\Delta z)$  для передачи с составными зубьями;  
 — — - кривая, аппроксимирующая значения  $\lambda(\Delta z)$  для передачи с составными зубьями

Графики зависимости коэффициента многопарности от параметра нагружения  $mE/W$  для передач с  $m = 3$  мм,  $z_c = 90$ ,  $x_g = 0$ ,  $\alpha_w = 30^\circ$  с цельными и составными зубьями ( $h/m = 0,6$ ) представлены на рисунке 14.

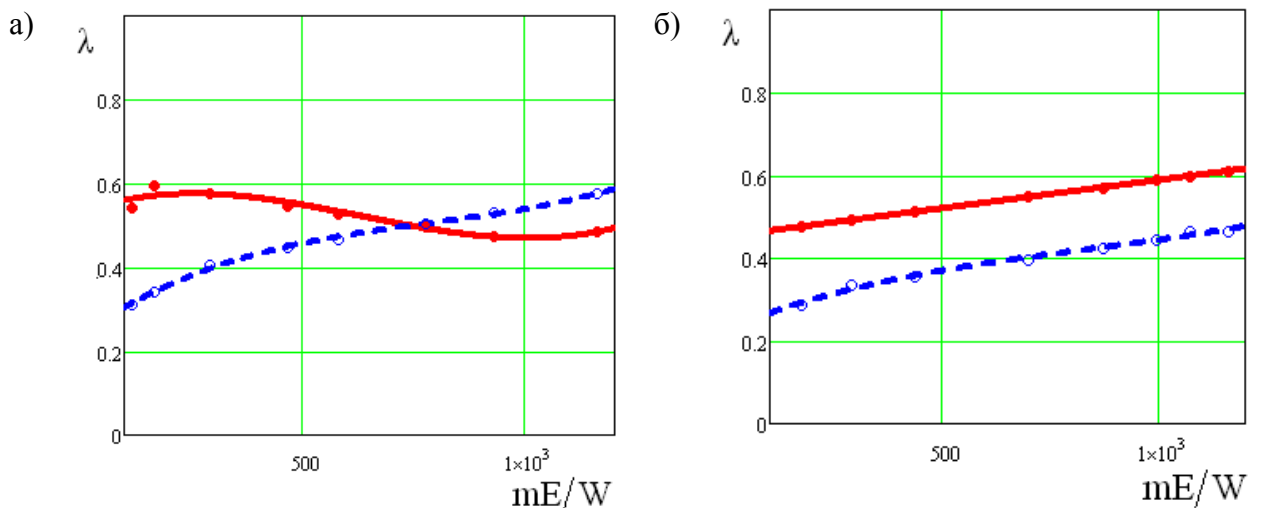


Рис. 14. Графики зависимости  $\lambda(mE/W)$ : а – при  $\Delta z = 2$ ; б – при  $\Delta z = 3$ ;

●●● - значения  $\lambda(mE/W)$  для передачи с цельными зубьями; — - кривая, аппроксимирующая значения  $\lambda(mE/W)$  для передачи с цельными зубьями;  
 ○○○ - рассчитанные значения  $\lambda(mE/W)$  для передачи с составными зубьями;  
 - - - кривая, аппроксимирующая значения  $\lambda(mE/W)$  для передачи с составными зубьями

На рисунке 15 изображены графики зависимости коэффициента многопарности от толщины вставки отнесенной к модулю зубьев  $h/m$  при различной передаваемой нагрузке и углах зацепления для передач с  $m = 3$  мм,  $z_e = 90$ ,  $\Delta z = 3$ ,  $x_g = 0$ .

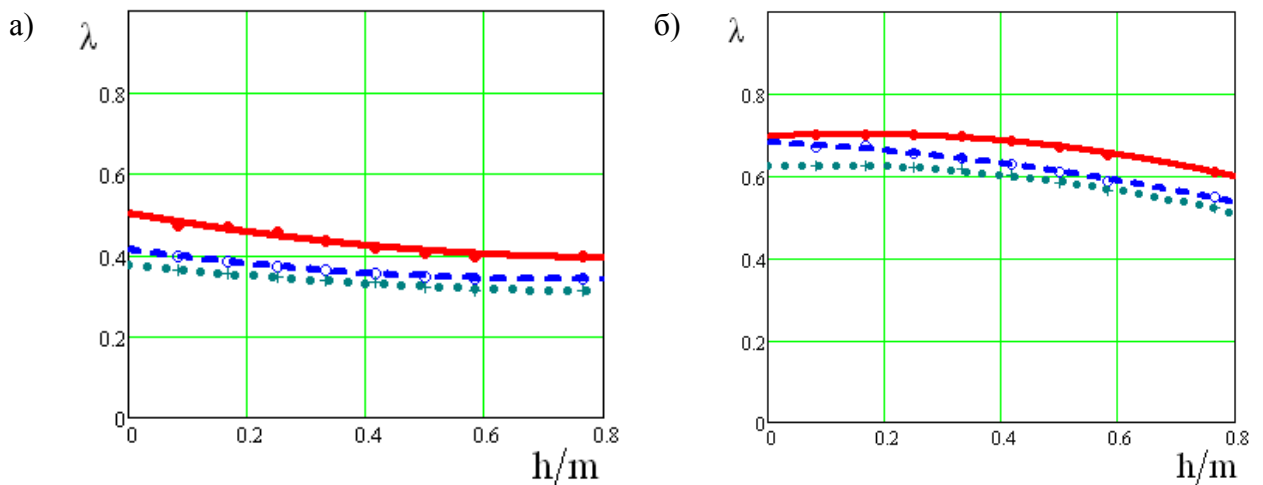


Рис. 15. Графики зависимости  $\lambda(h/m)$ : а – при  $\alpha_w = 30^\circ$ ; б – при  $\alpha_w = 45^\circ$ ;

●●● - значения  $\lambda(h/m)$  при нагрузке  $mE/W = 698$  ; — - кривая, аппроксимирующая значения  $\lambda(h/m)$  при нагрузке  $mE/W = 698$  ;  
 ○○○ - рассчитанные значения  $\lambda(h/m)$  при нагрузке  $mE/W = 349$  ;  
 - - - кривая, аппроксимирующая значения  $\lambda(h/m)$  при нагрузке  $mE/W = 349$  ;  
 + + + - значения  $\lambda(h/m)$  при нагрузке  $mE/W = 232$  ; ●●● - кривая, аппроксимирующая значения  $\lambda(h/m)$  при нагрузке  $mE/W = 232$

Анализ построенных графиков показывает следующее:

- 1) наиболее эффективен переход с цельных зубьев на составные при больших значениях чисел зубьев колеса (см. рис. 12 (а)) и оптимальной разнице в числах зубьев колес  $\Delta z = 2$ ;
- 2) при  $\Delta z = 1$  и  $\alpha_w = 45^\circ$  приходится значительно укорачивать зубья, предотвращая интерференцию и заклинивание передачи, что недопустимо уменьшает коэффициент перекрытия и одновременно увеличивает зазоры в парах зубьев;

- 3) составные зубья целесообразно использовать при больших передаваемых нагрузках (рис. 14);
- 4) толщина пластинчатой вставки должна выполняться по возможности большей, но несколько меньше толщины зуба на окружности вершин (см. рис. 15).

При проектировании передачи с составными (слоеными) зубьями необходимо учитывать, что сложность изготовления зубчатых колес возрастает с уменьшением модуля зуба. Поэтому целесообразно такие зубья применять в крупномодульных передачах.

В проведенном исследовании учитывались лишь изгибные деформации зубьев, без учета сжатия зуба под действием радиальной составляющей силы в зацеплении и сдвиговых деформаций под действием тангенциальной составляющей. В дальнейшем планируются работы над уточнением методики расчета зацеплений из слоеных зубьев и исследования других путей повышения податливости зубьев с целью определения оптимального варианта.

### **Литература**

1. Кудрявцев В.Н., Кирдяшев Ю.Н., Гинзбург Е.Г. Планетарные передачи. Справочник.– Л.: Машиностроение, 1977.– 563 с.
2. Плеханов Ф.И., Блинов И.А., Исследование влияния геометрии зацепления планетарной передачи на распределение нагрузки между зубьями колес // Сб. ст. «Вестник ИжГТУ». – Ижевск: ИжГТУ. - 2010. – вып. 3 (47) – С. 32-34.
3. Плеханов Ф.И. Зубчатые планетарные передачи. Типы, основы кинематики, геометрии и расчета на прочность: Учебно-научное пособие для высших учебных заведений. – Ижевск: Удмуртия, 2003. – 200 с.